

- (1) $a \geq 0$ のとき、 $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=1$ が成り立つことを用いて、自然数 n に対して、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

- (2) 2以上の自然数 n に対して、 $F(n)$ を

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

で定めるとき、 $2\sqrt{n}-3 < F(n) < 2\sqrt{n}-2$ が成り立つことを証明せよ。

- (3) $n=10^6$ のとき、(2)の $F(n)$ の整数部分を求めよ。

(宮城教大)